

# Планирование траектории БПЛА в сложных условиях при наличии угроз

К.В. Степанян

*ИППИ им. А.А. Харкевича, Москва*  
*KVStepanyan@iitp.ru*

А.Б. Миллер

*ИППИ им. А.А. Харкевича, Москва*  
*amiller@iitp.ru*

Б.М. Миллер

*ИППИ им. А.А. Харкевича, Москва и Университет Монаш, Австралия*  
*bmiller@iitp.ru*

## Аннотация

*В данной работе рассматривается полет беспилотного летательного аппарата (БПЛА) в сложных условиях при наличии угроз. Приведено описание угроз в терминах рельефа, осуществлено нахождение численного решения с помощью краевой задачи и сравнение результата с принудительным перелетом через заданные точки.*

## 1. Введение

Задача планирования траектории БПЛА в условиях риска известна очень давно [1], [2] и остается предметом исследований в последние годы, особенно в связи с планированием траекторий автономных БПЛА [3], [4], [5], [6], [7]. Начиная с оригинальных работ по планированию траекторий, задача планирования траекторий формулируется как задача определения траектории динамической системы с заданными начальным и терминальным условиями, которая минимизирует некоторый функционал, характеризующий интегральный риск и терминальный промах. Применение методов теории оптимального управления требует знания распределения рисков и его производных. На данном этапе решается задача определения оптимальной допустимой траектории при заданном стационарном распределении рисков и заданном рельефе местности. На первом этапе предполагается движение с постоянной линейной скоростью, причем траектория выбирается с целью минимизации интегрального риска и

отклонения от заданных границ высоты полета. Решение задачи ориентированно на использование численных методов, основанных на решении краевой задачи, к которой приводит необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума.

## 2. Постановка задачи

### Терминальные условия

Задано начальное  $A = (x(0), y(0), z(0))$  и конечное положение  $B = (x_T, y_T, z_T)$ , заданы ограничения на допустимое время перелета  $T \in [T_1, T_2]$ , и на скорость  $V \in [V_{min}, V_{max}]$ , удовлетворяющие ограничениям

$$L = \sqrt{(x_T - x(0))^2 + (y_T - y(0))^2 + (z_T - z(0))^2} \leq V_{max} T_1,$$

$$L = \sqrt{(x_T - x(0))^2 + (y_T - y(0))^2 + (z_T - z(0))^2} \leq V_{min} T_2.$$

### Динамическая модель БПЛА

На первом этапе мы используем простейшую модель управляемого движения, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V \cos \gamma \cos \theta, & \dot{y}(t) &= V \sin \gamma \cos \theta, \\ \dot{z}(t) &= V \sin \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $V \in [V_{min}, V_{max}]$  — заданная выше постоянная скорость, а управления  $\gamma \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  — есть угол курса (рыскания) и угол тангажа, соответственно.

### Критерий качества

Задается в форме интегрального риска, вычисляемого по формуле

$$J = \int_0^T [f(x(t), y(t)) + \phi(x(t), y(t), z(t))] dt + k [(x(T) - x_T)^2 + (y(T) - y_T)^2 + (z(T) - z_T)^2], \quad (2)$$

где первое слагаемое под знаком интеграла есть типовое распределение рисков, которое характеризуется координатами центров угроз и пространственным распределением риска.

На основе предварительных исследований [8] для заданных координат  $(x_i, y_i)$  центра  $i$ -го источника угроз ( $i = 1, \dots, M$ ) пространственное распределение риска задается следующим соотношением:

$$f_i(x, y) = \frac{a_i}{b_i + c_i(x - x_i)^2 + d_i(y - y_i)^2}.$$

Данное представление не имеет сингулярностей, затрудняющих численное решение задачи, таких как, например в [4], и характеризуется естественной физически реальной скоростью убывания при больших расстояниях от центра угрозы в отличие от гауссовского распределения [3]. Другие распределения угроз зависят от взаимного положения БПЛА и источника и их моделирование требует знания формы БПЛА и его ориентации в пространстве и весьма затруднительно [5], [6], [7]. Мы предполагаем, что суммарное распределение угроз (hazard rate) в заданной точке пространства  $(x, y)$  есть сумма отдельных интенсивностей угроз

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^M f_i(x, y). \quad (3)$$

С вероятностной точки зрения данное предположение соответствует случаю независимости источников угроз [3] и Марковской модели формирования суммарного риска. В этой модели суммарная вероятность провала миссии есть монотонная функция интеграла вдоль траектории  $(x(t), y(t), z(t)) \quad t \in [0, T]$ ,

$$J = \int_0^T f(x(t), y(t)) dt.$$

Следует отметить, что в рассматриваемой постановке распределения угроз не зависят от высоты, и поэтому фактически используется не сама траектория, а ее проекция на плоскость  $z = 0$ . Отклонение БПЛА от заданной высоты полета характеризуется заданным рельефом местности

$$z = h(x, y)$$

и неравенствами

$$h(x(t), y(t)) \leq z(t) \leq h(x(t), y(t)) + h_0,$$

где  $h_0$  — заданная высота полета.

Функция  $\phi(x, y, z)$  характеризует штраф за отклонение от заданного диапазона высот и имеет следующий вид

$$\phi(x, y, z) = \beta \left[ \frac{1}{z - h(x, y)} + \frac{1}{h(x, y) + h_0 - z} \right]. \quad (4)$$

Терминальное слагаемое в критерии качества (2) со значением  $k \gg 1$  характеризует отклонение траектории от заданного положения  $B = (x_T, y_T, z_T)$ .

### Постановка задачи с нефиксированным временем и параметрами

Задача состоит в определении времени  $T \in [T_1, T_2]$ , и управлений  $\gamma(t), \theta(t), t \in [0, T]$  минимизирующих критерий качества

$$J \rightarrow \min_{(T, V, \gamma(\cdot), \theta(\cdot))}.$$

Данная задача относится к классу задач с нефиксированным временем и параметрами, поэтому ее решение является достаточно затруднительным, поскольку приводит к дополнительным краевым условиям [9] §2.7, §2.8, мы упрощаем постановку задачи, приводя ее к задаче оптимального управления с фиксированным временем.

### 2.1. Постановка задачи с фиксированным временем и параметрами

**2.1.1. Вспомогательная задача с фиксированным временем.** Сделаем в интеграле (2) замену переменных  $s = t/T$ , тогда

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^1 [f(x(sT), y(sT)) + \\ &+ \phi(x(sT), y(sT), z(sT))] ds = \\ &= T \int_0^1 [f(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) + \phi(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))] ds, \end{aligned} \quad (5)$$

где переменные  $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))$  удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} (\tilde{x}(0), \tilde{y}(0), \tilde{z}(0)) &= (x(0), y(0), z(0)), \\ (\tilde{x}(1), \tilde{y}(1), \tilde{z}(1)) &= (x_T, y_T, z_T), \end{aligned} \quad (6)$$

и уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(s) &= TV \cos \gamma(sT) \cos \theta(sT) = \tilde{V} \cos \tilde{\gamma}(s) \cos \tilde{\theta}(s), \\ \dot{\tilde{y}}(s) &= TV \sin \gamma(sT) \cos \theta(sT) = \tilde{V} \sin \tilde{\gamma}(s) \cos \tilde{\theta}(s), \\ \dot{\tilde{z}}(s) &= TV \sin \theta(sT) = \tilde{V} \sin \tilde{\theta}(s),\end{aligned}\quad (7)$$

где  $T$  и  $V$  выбираются из условия разрешимости задачи

$$\begin{aligned}VT &= \\ &= \tilde{V} \in [\min\{V_{max}T_1, V_{min}T_2\}, \max\{V_{max}T_1, V_{min}T_2\}].\end{aligned}\quad (8)$$

Вспомогательная задача с фиксированным временем формулируется как задача на минимум критерия

$$J^{aux} = \int_0^1 f(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) ds + \phi(\tilde{x}(1), \tilde{y}(1), \tilde{z}(1)) + \tilde{k}\Phi(\tilde{x}(1), \tilde{y}(1), \tilde{z}(1)),\quad (9)$$

где

$$\Phi(x, y, z) = (x - x_T)^2 + (y - y_T)^2 + (z - z_T)^2,$$

на траекториях, удовлетворяющих (7), с выбором модифицированной скорости  $\tilde{V}$ , удовлетворяющей условию (8) и  $\tilde{k} = k/T$ .

Решение вспомогательной задачи дает оптимальное значение модифицированной скорости  $\tilde{V}$  и оптимальные управления  $\tilde{\gamma}(s), \tilde{\theta}(s), s \in [0, 1]$ , и минимальное значение критерия качества  $J^{aux}$ .

**2.1.2. Оптимальное решение в исходной задаче.** Для того чтобы получить решение в исходной задаче мы должны задать время полета  $T$ , определить скорость полета  $V = \tilde{V}/T$  и оптимальные управления  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t/T), \theta(t) = \tilde{\theta}(t/T)$ . Значение интегрального риска равно  $J = TJ^{aux}$ , поэтому оптимальное время полета и скорость определяются из соотношений

$$\begin{aligned}T^{opt} &= \operatorname{argmin}\{T : T \in [T_1, T_2], V \in [V_{min}, V_{max}], VT = \tilde{V}\}, \\ V^{opt} &= \tilde{V}/T^{opt}.\end{aligned}$$

**2.2. Определение оптимального управления во вспомогательной задаче с помощью принципа максимума [9].**

Будем решать задачу оптимального управления вначале с фиксированной скоростью  $\tilde{V}$ .

Задачи с терминальными условиями достаточно сложны, поэтому решаем задачу с

модифицированным критерием (9) со штрафом за терминальный промах

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{aux} &= \int_0^1 f_0(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)) ds + \\ &+ \Phi(\tilde{x}(1), \tilde{y}(1), \tilde{z}(1)),\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$f_0(x, y, z) = f(x, y) + \phi(x, y, z),$$

и коэффициент

$$\tilde{k} \gg 1,$$

должен выбираться достаточно большим. С таким критерием можно решать задачу минимизации критерия (10) без терминальных условий.

Введем гамильтониан

$$\begin{aligned}H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta}, \psi_x, \psi_y, \psi_z) &= \\ &= \psi_x \tilde{V} \cos \tilde{\gamma} \cos \tilde{\theta} + \psi_y \tilde{V} \sin \tilde{\gamma} \cos \tilde{\theta} + \\ &+ \psi_z \tilde{V} \sin \tilde{\theta} - f_0(\tilde{x}, \tilde{y}).\end{aligned}\quad (11)$$

**Принцип максимума:** Если  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\gamma}, \tilde{\theta})$  — оптимальная траектория и управление, то существуют сопряженные переменные  $\psi_x(s), \psi_y(s), \psi_z(s)$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_x(s) &= \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial x} \right|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))}, \\ \dot{\psi}_y(s) &= \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial y} \right|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))}, \\ \dot{\psi}_z(s) &= \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial z} \right|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))},\end{aligned}\quad (12)$$

При этом оптимальное управление доставляет максимум Гамильтониану, то есть для любого  $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\theta}(s)) &= \\ &= \operatorname{argmax}_{\gamma, \theta} H(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s), \gamma, \theta, \psi_x(s), \psi_y(s), \psi_z(s)),\end{aligned}\quad (13)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\cos \tilde{\gamma}(s) \cos \tilde{\theta}(s) &= \frac{\psi_x(s)}{\sqrt{\psi_x^2(s) + \psi_y^2(s) + \psi_z^2(s)}}, \\ \sin \tilde{\gamma}(s) \cos \tilde{\theta}(s) &= \frac{\psi_y(s)}{\sqrt{\psi_x^2(s) + \psi_y^2(s) + \psi_z^2(s)}}, \\ \sin \tilde{\theta}(s) &= \frac{\psi_z(s)}{\sqrt{\psi_x^2(s) + \psi_y^2(s) + \psi_z^2(s)}}.\end{aligned}\quad (14)$$

Замыкая систему уравнений (7), (12) оптимальным управлением (13) получаем краевую задачу, которой удовлетворяет оптимальная траектория во вспомогательной задаче.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(s) &= \frac{\tilde{V} \psi_x(s)}{\sqrt{\psi_x^2(s) + \psi_y^2(s) + \psi_z^2(s)}}, \\ \dot{\tilde{y}}(s) &= \frac{\tilde{V} \psi_y(s)}{\sqrt{\psi_x^2(s) + \psi_y^2(s) + \psi_z^2(s)}}, \\ \dot{\tilde{z}}(s) &= \frac{\tilde{V} \psi_z(s)}{\sqrt{\psi_x^2(s) + \psi_y^2(s) + \psi_z^2(s)}}, \\ \psi_x(s) &= \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial x} \right|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))}, \\ \psi_y(s) &= \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial y} \right|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))}, \\ \psi_z(s) &= \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial z} \right|_{(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))}.\end{aligned}\quad (15)$$

**Начальные условия:**

$$\tilde{x}(0) = x(0), \quad \tilde{y}(0) = y(0), \quad \tilde{z}(0) = z(0).$$

**Терминальные условия:**

$$\begin{aligned}\psi_x(1) &= -k(\tilde{x}(1) - x_T), \quad \psi_y(1) = -k(\tilde{y}(1) - y_T), \\ \psi_z(1) &= -k(\tilde{z}(1) - z_T).\end{aligned}$$

**2.2.1. Определение скорости.** Вообще говоря, определение скорости  $\tilde{V}$  есть самый сложный этап решения. Если скорость слишком мала или велика, то краевая задача не имеет решения и численная процедура расходится. Однако, численные методы решения краевых задач допускают осуществление поиска по параметру, поэтому следует задать вначале значение скорости и высоты полета, то есть начальные и конечные условия по  $z$  так, чтобы задача заведомо имела решение, например, с постоянной по величине и направлению скоростью. Затем, начиная с этого значения, следует осуществить поиск по скорости, изменяя при этом и высоту полета.

Краевая задача решается численно, для различных значений  $\tilde{V}$ , удовлетворяющих ограничению (8) и определяется значение  $\tilde{V}$ , при котором  $J^{aux}$  достигает минимального значения. Для этого необходимо решить задачу параметрической оптимизации по скалярному параметру  $\tilde{V}$ .

**2.2.2. Определение оптимального управления и траектории в исходной задаче.** Время перелета  $T$  и скорость  $V$  находятся как описано выше в разделе 2.1.2. Оптимальная траектория и оптимальное управление определяются путем замены времени  $t = sT$  и соответственно

$$\begin{aligned}x(t) &= \tilde{x}(t/T), \quad y(t) = \tilde{y}(t/T), \quad z(t) = \tilde{z}(t/T), \\ \gamma(t) &= \tilde{\gamma}(t/T), \quad \theta(t) = \tilde{\theta}(t/T)\end{aligned}$$

Переменные

$$x(t) = \tilde{x}(t/T), \quad y(t) = \tilde{y}(t/T), \quad z(t) = \tilde{z}(t/T)$$

находятся из системы уравнений (1), где

$$\begin{aligned}\cos \gamma(t) \cos \theta(t) &= \frac{\tilde{\psi}_x(t)}{\sqrt{\tilde{\psi}_x^2(t) + \tilde{\psi}_y^2(t) + \tilde{\psi}_z^2(t)}}, \\ \sin \gamma(t) \cos \theta(t) &= \frac{\tilde{\psi}_y(t)}{\sqrt{\tilde{\psi}_x^2(t) + \tilde{\psi}_y^2(t) + \tilde{\psi}_z^2(t)}}, \\ \sin \theta(t) &= \frac{\tilde{\psi}_z(t)}{\sqrt{\tilde{\psi}_x^2(t) + \tilde{\psi}_y^2(t) + \tilde{\psi}_z^2(t)}}.\end{aligned}$$

Сопряженные переменные  $(\tilde{\psi}_x(t), \tilde{\psi}_y(t), \tilde{\psi}_z(t)) = (\psi_x(t/T^*), \psi_y(t/T^*), \psi_z(t/T^*))$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\psi}}_x(t) &= \frac{1}{T^*} \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial x} \right|_{(x(t), y(t), z(t))}, \\ \dot{\tilde{\psi}}_y(t) &= \frac{1}{T^*} \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial y} \right|_{(x(t), y(t), z(t))}, \\ \dot{\tilde{\psi}}_z(t) &= \frac{1}{T^*} \left. \frac{\partial f_0(x, y, z)}{\partial z} \right|_{(x(t), y(t), z(t))}.\end{aligned}\quad (16)$$

## 3. Численные примеры

### 3.1. Пример 1.

В целях упрощения исходной задачи мы разбиваем ее на две более простых. На первом этапе строится траектория полета в горизонтальной плоскости по заданным точкам. В данном примере заданы начальная точка (0, -4), конечная точка (-1, 1), и промежуточные точки (1, -2), (0.7, -1) и (0, 0). Траектория строится при помощи интерполяционного полинома Лагранжа, проходящего через заданные пять точек. Затем выбирается замена времени, обеспечивающая движение по заданной траектории с постоянной скоростью. На втором этапе определяется высота полета с учетом рельефа местности, рассчитанного

вдоль выбранной траектории. Для определения высоты полета решается задача определения траектории,

$$\dot{z}(t) = w(t), \quad \text{где } w(t) \in [w_{min}, w_{max}].$$

Чтобы обеспечить выполнение ограничения

$$h(x(t), y(t)) = h(t) \leq z(t) \leq h_0$$

критерий качества выбирается в виде

$$J = \int_0^1 f(z(t), t) dt = \int_0^1 \beta \left[ \frac{1}{z(t) - h(t)} - \frac{1}{z(t) - h_0} \right] dt.$$

Если начальное условие по  $z$  удовлетворяет ограничению, то подынтегральное выражение остается ограниченным, если ограничение выполнено на всем участке полета.

В данном примере

$$h(x, y) = 1 + 0.5 \cos 3x + 0.5 \sin y,$$

и  $h_0 = 2.3$ . Оптимальное управление по высоте находится из принципа максимума и равно

$$w_{opt} = \begin{cases} w_{min}, & \text{если } \psi_z(t) \leq 0, \\ w_{max}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где сопряженная переменная  $\psi_z(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{\psi}_z(t) = - \left. \frac{\partial f(z(x, y), t)}{\partial z} \right|_{x(t), y(t)}.$$

Сопряженная переменная определяется при решении краевой задачи с начальным условием  $z(0) = 1.5$  и граничным условием  $\psi_z(1) = 0$ . Приближенное решение краевой задачи для переменной  $z(t)$  и соответствующая оптимальная траектория показаны ниже на Рис. 2 и 3.

### 3.2. Пример 2.

В данном примере мы решаем трехмерную краевую задачу при заданном распределении уровня угроз и рельефа, то есть находим траекторию соединяющую точки  $(0, -4, 2)$  и  $(-1, 1, 2.5)$  и минимизирующую функционал

$$J = \int_0^1 f_0(x(t), y(t), z(t)) dt,$$

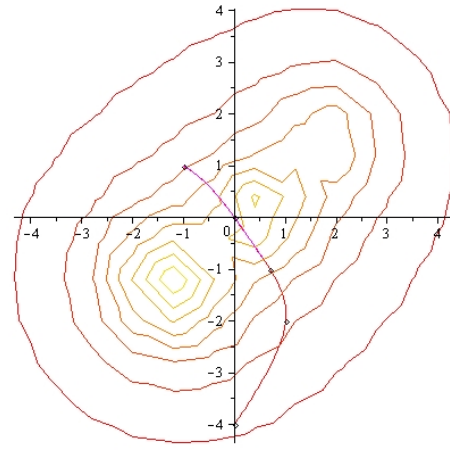


Рис. 1. Траектория в горизонтальной плоскости

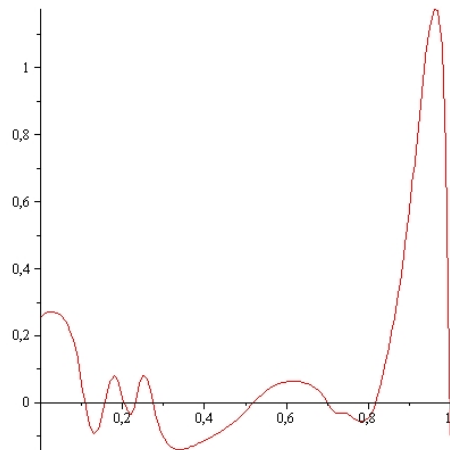


Рис. 2. Сопряженная переменная  $\psi_z$

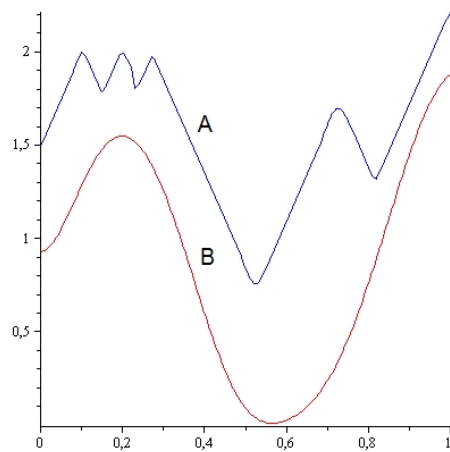


Рис. 3. Траектория (А) и рельеф (В)

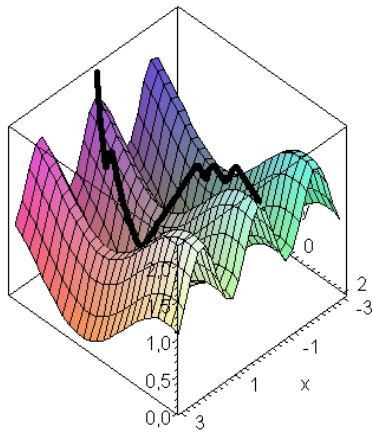


Рис. 4. Траектория полета в трехмерном пространстве

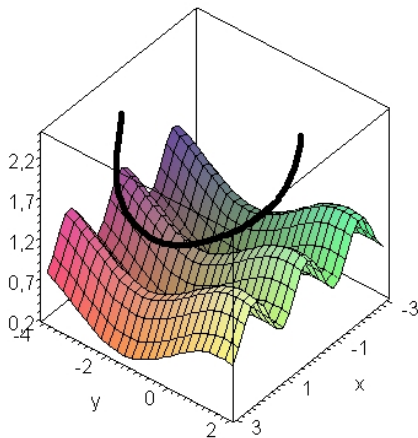


Рис. 5. 3D-оптимальная траектория с заданным рельефом

где

$$\begin{aligned}
 f_0(x,y,z) = & \frac{3}{(1+(x+1.3)^2+(y+1.3)^2)^2} + \\
 & + \frac{3}{(1+(x-1.4)^2+(y-1.1)^2)^2} + \\
 & + \frac{1.1}{1+(z-0.3\cos 3x-0.8-0.3\sin y)^2} + \\
 & + \frac{4}{1+(3-z)^2}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

учитывает и распределение угроз и рельеф местности. Результаты расчетов приведены на Рис. 5 и 6.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке

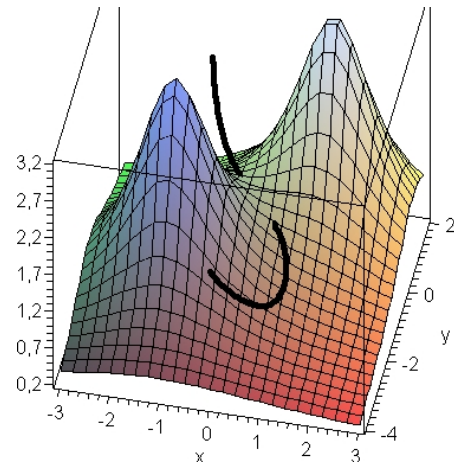


Рис. 6. 3D-оптимальная траектория в поле угроз

Австралийского Совета по научным исследованиям, грант ARC DP0988685 и Российского Фонда фундаментальных исследований, грант 10-01-00710-а.

#### Список литературы

- [1] **A. Letov** Flight Dynamics and Control, Nayka, Fizmatlit, 1969 [in Russian].
- [2] **J. Vian and J. Moore** Trajectory Optimization with Risk Minimization for Military Aircraft, AIAA J. Guidance, V. 12, No. 3, 1989, pp. 311–317.
- [3] **A. Dogan and U. Zengin** Unmanned Aerial Vehicle Dynamic-Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map. AIAA J. Guidance, Control and Dynamics, V. 29, No 29, 2006, pp. 723–732.
- [4] **A. Galayev, E. Maslov, and E. Rubinovich** On a Motion Control Problem for an Objects in a Conflict Environment, Journal of Computers and Systems Sciences International, V. 40, No. 3, 2009, pp. 458–464.
- [5] **R. Murphey, S. Uryasev, and M. Zabaranin** Trajectory Optimization in a Threat Environment, RESEARCH REPORT 2003-9, Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida, 2003.
- [6] **M. Zabaranin, S. Uryasev, and P. Pardalos** Optimal Risk Path Algorithm, in.: Cooperative Control and Optimization. Eds.: R. Murphay, P. Pardalos. Kluwer, Dordrecht, 2002, pp. 271–303.
- [7] **M. Zabaranin, S. Uryasev, and R. Murphey** Aircraft Routing under the Risk of Detection Naval Research Logistics, **53**, 2006, pp. 728–747.
- [8] **B. Miller, K. Stepanyan, A. Miller** Simulation of permissible UAV trajectories, Proceedings of the VIII International Conference on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets (NPNJ"2010), 25-31 May 2010, Alushta, Crimea, Ukraine, pp. 321–323
- [9] **A. Bryson and Yu-Chi Ho** Applied Optimal Control, Waltham, Massachusetts, Toronto, London 1969.